COMPTE RENDU
DES SÉANCES
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 5 JANVIER 1846.
PRÉSIDENCE DE M. MATHIEU.

RENOUVELLEMENT ANNUEL DU BUREAU ET DE LA COMMISSION ADMINISTRATIVE.

L'Académie procède, par la voie du scrutin, à la nomination d'un vice-président pour l'année 1846.

Au premier tour du scrutin, le nombre des votants étant de 55,

M. Adolphe Brongniart obtient 26 suffrages.
M. Roux. 19
M. Beudant. 8
M. Serres. 1

Il y a un billet blanc.

Ce scrutin n'ayant point donné de majorité absolue, on procède à un deuxième tour dans lequel, le nombre des votants restant le même,

M. Adolphe Brongniart obtient 37 suffrages.
M. Roux. 17

Il y a un billet blanc.

M. **Adolphe Brongniart**, ayant réuni la majorité absolue des suffrages, est proclamé vice-président pour l'année 1846.

M. **Mathieu**, vice-président pendant l'année 1845, passe aux fonctions de président.

Conformément au règlement, M. **Élie de Beaumont**, avant de quitter le fauteuil de président, rend compte de ce qui s'est fait pendant l'année 1845 relativement à l'impression des *Mémoires de l'Académie* et des *Mémoires des Savants étrangers*.

Le XIXe volume des *Mémoires de l'Académie* a été terminé dans le cours de l'année précédente et distribué au mois d'avril 1845; le tome XX est composé jusqu'à la vingtième feuille.

Le tome IX des *Mémoires des Savants étrangers* est entièrement composé; l'impression des cinq dernières feuilles se fera sous peu de jours.

L'Académie procède ensuite, également par la voie du scrutin, à la nomination de deux membres de la *Commission administrative*.

MM. **Chevreul** et **Poinsot** réunissent la majorité des suffrages.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les fonctions de cinq ou six variables, et spécialement sur celles qui sont doublement transitives; par* M. **Augustin Cauchy**. (Suite et fin.)

§ III. — *Sur la fonction de six variables, qui est tout à la fois transitive par rapport à trois et à cinq variables, et intransitive par rapport à quatre.*

« Soient

Ω une fonction de six variables x, y, z, u, v, w,
M le nombre de ses valeurs égales,
m le nombre de ses valeurs distinctes.

On aura

$$mM = 1.2.3.4.5.6,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1) \qquad mM = 720.$$

Soit d'ailleurs H_l le nombre des substitutions qui renferment l variables, et n'altèrent pas la valeur de la fonction Ω. Si cette fonction, étant transitive par rapport à six et à cinq variables, offre plus de deux valeurs distinctes, alors, d'après ce qu'on a vu dans les paragraphes précédents, elle aura 6, 12 ou 24 valeurs distinctes, et sera toujours altérée par toute substitution qui déplacera deux ou trois variables; on aura donc, non-seulement

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 0,$$

mais encore

$$H_2 = 0, \quad H_3 = 0.$$

Cela posé, les formules établies dans la séance du 10 novembre donneront

$$M = H_6 + H_5 + H_4 + 1,$$
$$M = H_5 + 2H_4 + 6,$$
$$M = 2H_4 + 30,$$

et l'on en conclura

(2) $$H_6 = \tfrac{1}{2}M - 10, \quad H_5 = 24, \quad H_4 = \tfrac{1}{2}M - 15.$$

» Soit maintenant

$$P_{a,b,c,\ldots}$$

une substitution relative aux six variables

$$x, y, z, u, v, w,$$

et composée de facteurs circulaires dont le premier soit de l'ordre a, le second de l'ordre b, le troisième de l'ordre c, etc. Soient encore

$\omega_{a,b,c,\ldots}$ le nombre des formes que peut revêtir la substitution $P_{a,b,c,\ldots}$ exprimée à l'aide de ses facteurs circulaires, lorsqu'on met toutes les variables en évidence, et que l'on s'astreint à faire toujours occuper les mêmes places, dans cette substitution, par des facteurs circulaires de même ordre;

$\varpi_{a,b,c,\ldots}$ le nombre total des substitutions semblables à $P_{a,b,c,\ldots}$, qui peuvent être formées avec les six variables $x, y, z, u, v, w, \ldots$;

$h_{a,b,c,\ldots}$ le nombre de celles de ces substitutions qui n'altèrent pas la valeur de Ω;

$k_{a,b,c,\ldots}$ le nombre des valeurs distinctes de Ω qui ne sont pas altérées par la substitution $P_{a,b,c,\ldots}$.

» Puisque, dans l'hypothèse admise, les substitutions qui n'altéreront pas Ω déplaceront quatre variables au moins, celles de ces substitutions qui déplaceront quatre ou cinq variables devront être régulières (séance du 8 décembre), et par conséquent circulaires, si elles déplacent cinq variables. On aura donc, non-seulement

$$h_2 = 0, \quad h_3 = 0,$$

mais encore

$$H_5 = h_5.$$

On aura, au contraire,

$$H_4 = h_4 + h_{2,2},$$

$$H_6 = h_6 + h_{3,3} + h_{2,2,2} + h_{4,2}.$$

Donc, les formules (2) donneront

(3) $$h_4 + h_{2,2} = \tfrac{1}{2} M - 15, \quad h_5 = 24,$$

(4) $$h_6 + h_{3,3} + h_{2,2,2} + h_{4,2} = \tfrac{1}{2} M - 10.$$

» D'autre part, on aura généralement (séance du 15 décembre)

(5) $$m h_{a,b,c,\ldots} = \varpi_{a,b,c,\ldots} k_{a,b,c,\ldots};$$

et les deux nombres

$$h_{a,b,c,\ldots}, \quad k_{a,b,c,\ldots},$$

dont le premier sera égal ou inférieur à la limite $\varpi_{a,b,c,\ldots}$, le second égal ou inférieur à la limite m, ne pourront atteindre simultanément ces deux limites que dans le cas où Ω ne sera jamais altéré par aucune substitution de la forme $P_{a,b,c,\ldots}$. Enfin les nombres

$$\varpi_{a,b,c,\ldots}, \quad \omega_{a,b,c,\ldots}$$

seront liés entre eux par la formule

(6) $$\omega_{a,b,c,\ldots} \varpi_{a,b,c,\ldots} = mM = 720,$$

et comme on trouvera successivement

$$\omega_4 = (1.2)4 = 8, \quad \omega_{2,2} = (1.2)^2 2^2 = 16, \quad \omega_5 = 5,$$

$$\omega_6 = 6, \quad \omega_{3,3} = (1.2)3^2 = 18, \quad \omega_{2,2,2} = (1.2.3)2^3 = 48, \quad \omega_{4,2} = 4.2 = 8,$$

on en conclura

$$\varpi_4 = 90, \quad \varpi_{2,2} = 45, \quad \varpi_5 = 144,$$

$$\varpi_6 = 120, \quad \varpi_{3,3} = 40, \quad \varpi_{2,2,2} = 15, \quad \varpi_{4,2} = 90.$$

Donc la formule (5) donnera

(7) $mh_4 = 90k_4, \quad mh_{2,2} = 45k_{2,2}, \quad mh_5 = 144k_5,$

(8) $mh_6 = 120k_6, \quad mh_{3,3} = 40k_{3,3}, \quad mh_{2,2,2} = 15k_{2,2,2}, \quad mh_{4,2} = 90k_{4,2},$

et les équations (3), (4), jointes à la formule (1), entraîneront les suivantes :

(9) $$2k_4 + k_{2,2} = 8 - \frac{m}{3}, \qquad k_5 = \frac{m}{6};$$

(10) $$24k_6 + 8k_{3,3} + 3k_{2,2,2} + 18k_{4,2} = 72 - 2m.$$

Il suit des formules (9) que, dans l'hypothèse admise, c'est-à-dire dans le cas où la fonction Ω, étant transitive par rapport à cinq et à six variables, offre plus de deux valeurs égales, m doit être divisible par 6. Effectivement, d'après ce qu'on a vu dans les paragraphes précédents, m ne peut être alors que l'un des nombres

6, 12, 24,

auxquels correspondent les valeurs

120, 60, 30

du nombre M.

» D'autre part, puisque chacun des nombres

6, 12, 24

est divisible par le facteur 3, il résulte d'un théorème précédemment établi (séance du 13 octobre, page 851), que, dans l'hypothèse admise, quelques-unes des substitutions

(11) $$1, P, Q, R, \ldots,$$

qui n'altéreront pas la valeur de Ω, seront régulières et du troisième ordre. Donc, puisque h_3 est nul, $h_{3,3}$, et par suite $k_{3,3}$, ne pourront s'évanouir. Donc l'une, au moins, des substitutions $1, P, Q, R, \ldots$ sera de la forme $P_{3,3}$; et, comme la substitution inverse $P_{3,3}^{-1}$ sera encore de la même forme, nous devons conclure que $h_{3,3}$ sera, dans l'hypothèse admise, un nombre pair différent de zéro. Ce n'est pas tout : comme la seconde des formules (8) donne

$$(12) \qquad k_{3,3} = \frac{m}{40} h_{3,3},$$

le nombre $k_{3,3}$ devra être, ainsi que m, divisible par 3; et même, si l'on supposait $m = 24$, la formule (12), réduite à

$$k_{3,3} = \frac{3}{5} h_{3,3},$$

donnerait pour $k_{3,3}$ un nombre divisible par 6. Mais alors, évidemment, la formule (10) ne pourrait plus être vérifiée, puisque le premier membre, égal ou supérieur au nombre

$$8k_{3,3} = 48,$$

surpasserait la différence

$$72 - 2m = 72 - 48 = 24.$$

Donc il n'est pas possible de supposer $m = 24$.

» Concevons maintenant que la fonction Ω doive être tout à la fois transitive par rapport à six et à cinq variables, et intransitive par rapport à quatre. Alors, d'après ce qui a été dit dans le § Ier, le nombre m des valeurs distinctes de Ω ne pourra être que l'un des nombres

$$12, \quad 24.$$

Donc, puisqu'on devra exclure la supposition $m = 24$, on aura nécessairement

$$m = 12;$$

et par suite (*voir* la séance du 29 décembre, page 1405), h_4, k_4 devront s'évanouir. Alors aussi les formules (7), (8), (9), (10) donneront

$$(13) \qquad 4h_{2,2} = 15k_{2,2}, \quad h_5 = 12k_5,$$

(14) $h_6 = 10k_6$, $3h_{3,3} = 10k_{3,3}$, $4h_{2,2,2} = 5k_{2,2,2}$, $2h_{4,2} = 15k_{4,2}$,

(15) $$k_{2,2} = 4,\quad k_5 = 2,$$

(16) $$24k_6 + 8k_{3,3} + 3k_{2,2,2} + 18k_{4,2} = 48.$$

» Des formules (13) et (15) on déduira les suivantes :

(17) $$h_{2,2} = 15,\quad h_5 = 24,$$

que l'on pourrait tirer encore des équations obtenues dans le § Ier. Ajoutons que des formules (14) et (16) on pourra aisément déduire les valeurs des quantités

$$h_6,\quad h_{3,3},\quad h_{2,2,2},\quad h_{4,2};$$

et d'abord, puisque $k_{3,3}$ devra être un nombre entier distinct de zéro et divisible par 3, le terme $8k_{3,3}$ de la formule (14) sera égal ou supérieur à 24. Donc le terme $18k_{4,2}$ devra être inférieur à la différence $48 - 24 = 24$. Donc le nombre entier $k_{4,2}$ devra être inférieur à $\frac{4}{3}$; et, comme d'ailleurs il doit être divisible par 2, en vertu de la dernière des formules (14), on aura nécessairement

$$k_{4,2} = 0,\quad h_{4,2} = 0;$$

en sorte que l'équation (14) se trouvera réduite à

(18) $$24k_6 + 8k_{3,3} + 3k_{2,2,2} = 48.$$

D'autre part, si k_6 différait de zéro, on pourrait en dire autant de $k_{3,3}$ et de $k_{2,2}$, attendu qu'une substitution de la forme

$$P_6$$

a pour carré une substitution de la forme $P_{3,3}$, et pour cube une substitution de la forme $P_{2,2,2}$. Cela posé, comme en vertu des formules (14), $k_{3,3}$ devra être divisible par le facteur 3, et $k_{2,2,2}$ par le facteur 4, il est clair qu'en supposant k_6 différent de zéro, on obtiendrait pour premier membre de la formule (18) une somme égale ou supérieure à

$$24 + 8.3 + 3.4 = 60.$$

Donc alors cette formule ne pourrait être vérifiée. On aura donc encore nécessairement

$$k_6 = 0, \quad h_6 = 0;$$

et, par suite, l'équation (18) sera réduite à

$$(19) \qquad 8k_{3,3} + 3k_{2,2,2} = 48.$$

Enfin, il est facile de voir que $k_{2,2,2}$ et $h_{2,2,2}$ devront être divisibles par 3. En effet, concevons que l'on désigne simplement par la lettre P l'une des substitutions qui, étant de la forme $P_{3,3}$, n'altèrent pas la valeur de Ω; et supposons un instant que Ω ne soit pas non plus altéré par une certaine substitution $\mathfrak{P}$ de la forme $P_{2,2,2}$. Les deux substitutions P, $\mathfrak{P}$ ne pourront être permutables entre elles. Car si l'on avait

$$P\mathfrak{P} = \mathfrak{P}P,$$

alors, d'après ce qui a été dit dans la séance du 1er décembre (page 497), $\mathfrak{P}$ et P seraient de la forme

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{s}^3, \quad P = \mathfrak{s}^2,$$

$\mathfrak{s}$ étant une substitution circulaire du sixième ordre; et comme, en vertu de la formule

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}^3\mathfrak{s}^{-2} = \mathfrak{P}P^{-1},$$

$\mathfrak{s}$ serait une dérivée des deux substitutions $\mathfrak{P}$, P, la substitution $\mathfrak{s}$ devrait être elle-même du nombre de celles qui n'altéreraient pas la valeur de Ω. Cette conclusion étant incompatible avec l'équation

$$h_6 = 0,$$

précédemment établie, on peut affirmer que la substitution $\mathfrak{P}$ ne sera pas permutable avec P. Par la même raison, $\mathfrak{P}$ ne saurait être permutable avec la substitution P^2, qui est régulière et du troisième ordre, comme la substitution P. Donc, si l'on pose

$$(20) \qquad \mathfrak{P}' = P\mathfrak{P}P^{-1}, \qquad \mathfrak{P}'' = P^2\mathfrak{P}P^{-2},$$

on obtiendra pour $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, deux substitutions distinctes de $\mathfrak{P}$. D'ailleurs cha-

cune d'elles, étant semblable à $\mathfrak{P}$, et par conséquent de la forme $P_{2,2,2}$, ne pourra être permutable avec la substitution $\mathfrak{P}$. Donc la substitution $\mathfrak{P}''$, évidemment liée à $\mathfrak{P}'$ par la formule

$$\mathfrak{P}'' = P\mathfrak{P}'P^{-1}, \tag{21}$$

sera encore distincte de la substitution $\mathfrak{P}'$. Ce n'est pas tout : comme on tire des formules (20)

$$P\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'P, \qquad \mathfrak{P}'P = \mathfrak{P}''P, \qquad P\mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}P, \tag{22}$$

nous devons conclure que, si parmi les substitutions

$$1, \; P, \; Q, \; R, \ldots,$$

qui n'altèrent pas la valeur de Ω, quelques-unes,

$$\mathfrak{P}, \; \mathfrak{P}', \; \mathfrak{P}'', \ldots, \tag{23}$$

sont de la forme $P_{2,2,2}$, celles-ci, prises trois à trois, vérifieront des équations semblables aux équations (22); et comme évidemment deux systèmes de cette forme ne peuvent renfermer la même substitution $\mathfrak{P}$, sans se confondre l'un avec l'autre, il en résulte que le nombre $h_{2,2,2}$ des termes compris dans la série (23) devra être divisible par 3. Donc le nombre $k_{2,2,2}$, lié au nombre $h_{2,2,2}$ par la formule

$$5k_{2,2,2} = 4h_{2,2,2},$$

devra être divisible non-seulement par 4, mais aussi par 3, et, en conséquence, par 12. Donc, puisque le produit $8k_{3,3}$ doit être égal ou supérieur à 24, l'équation (19), de laquelle on tirera

$$3k_{2,2,2} = 48 - 8k_{3,3} = \text{ou} < 24,$$
$$k_{2,2,2} = \text{ou} < 8,$$

ne pourra être vérifiée sans que le nombre $k_{2,2,2}$ s'évanouisse. On aura donc

$$k_{2,2,2} = 0, \quad k_{3,3} = \frac{48}{8} = 6,$$

et, par suite, en vertu des formules (14),

$$h_{2,2,2} = 0, \quad h_{3,3} = 20. \tag{24}$$

» Ainsi, en définitive, si la fonction Ω est transitive par rapport à six et à cinq variables, et intransitive par rapport à quatre, les substitutions $1, P, Q, R, \ldots$, qui n'altéreront pas la valeur de Ω, seront toutes, hormis celle qui se réduit à l'unité, de l'une des trois formes

$$P_{3,3}, \quad P_5, \quad P_{2,2};$$

et, comme on aura

$$(25) \qquad h_{3,3} = 20, \quad h_5 = 24, \quad h_{2,2} = 15,$$

les divers termes qui, avec l'unité, composeront la suite

$$1, P, Q, R, \ldots$$

seront

20 substitutions de la forme $P_{3,3}$,

24 substitutions de la forme P_5,

15 substitutions de la forme $P_{2,2}$.

D'ailleurs, en vertu des principes établis dans le § I[er], celles de ces substitutions qui, étant circulaires et du cinquième ordre, c'est-à-dire de la forme P_5, renfermeront seulement les cinq variables

$$y, z, u, v, w,$$

se réduiront aux puissances

$$Q, Q^2, Q^3, Q^4$$

d'une même substitution circulaire Q; et comme on pourra fixer arbitrairement la forme des lettres propres à représenter les variables qui devront succéder l'une à l'autre, en vertu de la substitution Q, rien n'empêchera d'admettre que ces variables sont précisément

$$y, z, u, v, w.$$

On pourra donc supposer

$$(26) \qquad Q = (y, z, u, v, w).$$

» Soit maintenant R l'une des cinq substitutions qui, étant régulières et du second ordre, c'est-à-dire de la forme $P_{2,2}$, n'altéreront pas la valeur de Ω, et renfermeront quatre des cinq variables y, z, u, v, w. D'après ce qui a été

dit dans le § Ier, on pourra déterminer R à l'aide de l'équation symbolique

(27) $$R = \binom{Q^{-1}}{Q};$$

et si, pour fixer les idées, on veut déduire de la formule (27) celle des substitutions R qui ne déplacera ni la variable x, ni la variable u, on aura

$$R = \binom{w\,v\,u\,z\,y}{y\,z\,u\,v\,w},$$

ou, ce qui revient au même,

(28) $$R = (y, w)(z, v).$$

Ce n'est pas tout: les quinze substitutions régulières du second ordre qui, étant formées avec quatre des six variables

$$x, y, z, u, v, w,$$

n'altéreront pas la valeur de Ω, renfermeront trente facteurs circulaires du second ordre. Mais les facteurs distincts de cet ordre, qui peuvent être formés avec six variables, sont au nombre de 15 seulement. Donc, puisque la fonction Ω est supposée doublement transitive, c'est-à-dire transitive par rapport à six et à cinq variables, et qu'en conséquence les divers facteurs du second ordre devront tous reparaître le même nombre de fois dans les quinze substitutions régulières ci-dessus mentionnées, chacun d'eux devra toujours appartenir à deux substitutions distinctes. Cela posé, nommons

$$S \quad \text{et} \quad T,$$

celles des substitutions

$$1, P, Q, R, \ldots$$

qui, étant distinctes de R, mais de la forme $P_{2,2}$, renfermeront, la première, le facteur (y, w), et la seconde, le facteur (z, v). Le dernier facteur circulaire de S ne pourra être que (x, u); car s'il différait de (x, u), il renfermerait, avec l'une des variables x, u, l'une des variables z, v. Or, dans ce cas, le produit RS, qui serait encore l'une des substitutions propres à ne point altérer la valeur de Ω renfermerait seulement trois des six variables

$$x, y, z, u, v, w;$$

et nous avons vu que, dans l'hypothèse admise, chacune des substitutions 1, P, Q, R,... doit déplacer quatre variables au moins. On aura donc nécessairement

(29) $$S=(x, u)(y, w).$$

On trouvera de même

(30) $$T=(x, u)(z, v).$$

» D'après ce qui a été dit dans le § I[er], pour caractériser une fonction des cinq variables y, z, u, v, w, qui soit intransitive par rapport à quatre d'entre elles, il suffit de dire que cette fonction n'est altérée par aucune des deux substitutions

$$Q=(y, z, u, v, w), \quad R=(y, w)(z, v).$$

Si l'on veut, de plus, que Ω soit une fonction transitive des six variables

$$x, y, z, u, v, w,$$

alors, comme on vient de le voir, Ω devra satisfaire encore à la condition de n'être point altéré par la substitution

$$S=(x\ u)(y, w).$$

Réciproquement, si cette dernière condition est remplie, la fonction Ω, supposée déjà transitive par rapport aux cinq variables y, z, u, v, w, sera encore transitive par rapport à x, y, z, u, v, w, puisqu'on pourra évidemment faire passer dans cette fonction une variable quelconque à une place quelconque, en vertu de la substitution S, jointe à l'une des puissances de la substitution Q. Il est donc naturel de penser que, si l'on peut former une fonction transitive de cinq ou six variables, qui soit en même temps intransitive par rapport à quatre, on caractérisera cette fonction en disant qu'elle n'est altérée par aucune des trois substitutions

$$Q, R, S.$$

Toutefois, pour que l'existence d'une telle fonction, qui devra offrir seulement douze valeurs distinctes, et par suite, soixante valeurs égales, se trouve rigoureusement établie, il est nécessaire de prouver que les dérivées

des trois substitutions Q, R, S fournissent un système de soixante substitutions conjuguées les unes aux autres. On y parvient en suivant la marche que nous allons indiquer :

» D'abord, l'équation (27) pouvant s'écrire comme il suit

(31) $$RQ = Q^{-1}R,$$

on en conclura, en désignant par h et k deux entiers quelconques,

(32) $$R^k Q^h = Q^{(-1)^k h} R^k.$$

Donc les dérivées des substitutions Q, R pourront toutes être présentées sous chacune des formes

$$R^k Q^h, \quad Q^h R^k.$$

En d'autres termes, le système des puissances de Q sera permutable avec le système des puissances de R. Donc, par suite, les dérivées des deux substitutions Q, R, dont l'une est du cinquième ordre, l'autre du second, seront toutes réductibles à la forme

$$R^k Q^h,$$

et formeront un système de substitutions conjuguées dont l'ordre sera

$$2.5 = 10.$$

D'autre part, les trois substitutions

$$R = (y, w)(z, v), \quad S = (x, u)(y, w), \quad T = (x, u)(z, v)$$

forment, avec l'unité, un système de substitutions régulières conjuguées; et, comme deux de ces substitutions donnent toujours pour produit la troisième, en sorte qu'on a, par exemple,

(33) $$RS = T \quad \text{et} \quad SR = T,$$

il en résulte que les substitutions R, S sont permutables entre elles, et vérifient la formule

(34) $$RS = SR.$$

» Concevons maintenant que, l étant un entier quelconque, l'on pose

(35) $$S_l = Q^l S Q^{-l}.$$

Alors on trouvera, non-seulement

(36) $$S_0 = S = (x, u)(y, w),$$

mais encore

(37) $$S_1 = (x,v)(z,y),\quad S_2 = (x,w)(u,z),\quad S_3 = (x,y)(v,u),\quad S_4 = (x,z)(w,v);$$

et comme, en faisant croître ou décroître l d'un multiple de 5, on tirera toujours de la formule (35) la même valeur de S_l, il est clair que S_l admettra seulement cinq valeurs distinctes, savoir :

(38) $$S_0 = S,\quad S_1,\quad S_2,\quad S_3,\quad S_4.$$

De plus, comme, en vertu des formules (36) et (37), deux substitutions de la forme $S_l, S_{l'}$, quand elles seront distinctes l'une de l'autre, feront passer à la place de x deux variables diverses, il en résulte qu'une substitution de la forme

$$S_{l'}\, S_l^{-1}$$

déplacera toujours la variable x, et ne pourra se confondre avec une dérivée des seules substitutions Q et R. Donc, par suite, aux dix valeurs du produit

$$R^k Q^h$$

renfermées dans le tableau

(39) $$\begin{cases} 1, & Q, & Q^2, & Q^3, & Q^4, \\ R, & RQ, & RQ^2, & RQ^3, & RQ^4, \end{cases}$$

correspondront cinquante valeurs du produit

$$R^k Q^h S_l,$$

qui seront, non-seulement distinctes des substitutions (39), mais encore distinctes les unes des autres ; car, si l'on supposait

$$R^k Q^h S_l = R^{k'} Q^{h'} S_{l'},$$

on en conclurait

$$Q^{-h'}R^{-k'}R^{k}Q^{h} = S_{l'}S_{l}^{-1},$$

et cette dernière équation ne pouvant être vérifiée, dans le cas où S_l, S_l seraient deux substitutions distinctes, entraînerait la formule

$$S_{l'} = S_{l}.$$

Donc à deux valeurs distinctes de S_l correspondront toujours deux valeurs distinctes du produit

$$R^{k}Q^{h}S_{l};$$

et si l'on multiplie successivement chacune des six substitutions

(40) $$1,\quad S_0,\quad S_1,\quad S_2,\quad S_3,\quad S_4$$

par les dix termes du tableau (39), on obtiendra soixante substitutions distinctes les unes des autres, dont chacune se présentera sous l'une des deux formes

(41) $$R^{k}Q^{h},\quad R^{k}Q^{h}S_{l}.$$

Il reste à faire voir que ces soixante substitutions composent le système entier des substitutions dérivées de Q, R et S; ou, ce qui revient au même, qu'une dérivée quelconque des substitutions Q, R, S est toujours réductible à l'une des formes (41).

» Or, en premier lieu, on tire de la formule (35), jointe aux équations (32) et (34), non-seulement

(42) $$S_{l+h} = Q^{h}S_{l}Q^{-h},$$

et, par suite,

(43) $$Q^{h}S_{l} = S_{l+h}Q^{h},$$

mais encore

(44) $$RS_{l} = S_{-l}R,\quad RQ^{h}S_{l} = S_{-(l+h)}RQ^{h}$$

et généralement,

(45) $$R^{k}Q^{h}S_{l} = S_{(-1)^{k}(l+h)}R^{k}Q^{h}.$$

D'ailleurs, de la formule (45) il résulte immédiatement que, si l'on nomme $\mathcal{Q}$ l'une quelconque des substitutions (39), et $\mathcal{S}$ l'une quelconque des substitutions (40), tout produit de la forme $\mathcal{Q}\mathcal{S}$ sera en même temps de la forme $\mathcal{S}\mathcal{Q}$, les valeurs de $\mathcal{Q}$ et de $\mathcal{S}$ pouvant varier dans le passage d'une forme à l'autre.

» En second lieu, une dérivée quelconque T des substitutions Q, R, S, pourra toujours être considérée comme le produit de plusieurs facteurs, dont les uns seraient de la forme $\mathcal{Q}$, les autres de la forme $\mathcal{S}$; et, dans un semblable produit, deux facteurs consécutifs $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$ de la première forme pourront toujours être réduits à un seul facteur $\mathcal{Q}''$ de cette forme, puisque la substitution $\mathcal{Q}\mathcal{Q}'$ représentera encore une dérivée des substitutions Q et R. Donc, puisqu'on pourra aussi échanger entre eux deux facteurs consécutifs, dont l'un serait de la forme $\mathcal{Q}$, l'autre de la forme $\mathcal{S}$, en modifiant convenablement leurs valeurs, on pourra toujours, à l'aide de réductions et d'échanges successivement effectués, ramener la substitution T à la forme $\mathcal{Q}\mathcal{S}$, c'est-à-dire à l'une des formes (41), si, en désignant par $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, deux des substitutions (40), on peut toujours réduire le produit $\mathcal{S}\mathcal{S}'$ à la forme $\mathcal{Q}\mathcal{S}\mathcal{Q}'$, et, par suite, à la forme $\mathcal{Q}\mathcal{S}$. Il y a plus : comme on tire généralement de l'équation (35)

$$S_{l'}S_l = Q^l S_{l'-l} S Q^{-l}, \tag{46}$$

il est clair que la substitution T sera effectivement réductible à l'une des formes (41), si l'on peut réduire tout produit de la forme

$$S_l S$$

à la forme $\mathcal{Q}\mathcal{S}$, ou, ce qui revient au même, à la forme $\mathcal{S}\mathcal{Q}$. D'ailleurs, si l'on supposait $l = 0$, on aurait

$$\mathcal{S}_l\mathcal{S} = \mathcal{S}^2 = 1,$$

et, par suite, $\mathcal{S}_l\mathcal{S}$ serait effectivement de la forme $\mathcal{S}\mathcal{Q}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{Q}$ étant réduits alors à l'unité. Donc, pour constater l'existence de la fonction de six variables qui, étant doublement transitive, offre trois valeurs distinctes, il suffit de prouver que, l étant l'un quelconque des nombres entiers 1, 2, 3, 4, on peut toujours vérifier la formule

$$S_l S = \mathcal{S}\mathcal{Q}, \tag{47}$$

en prenant pour $\mathcal{S}$ une des substitutions (38), et pour $\mathcal{Q}$ l'une des substitutions (39).

» La question, ramenée à ce point, peut être facilement résolue. Pour en obtenir la solution, je commencerai par observer que, $\mathcal{S}$ étant une substitution régulière du second ordre, on aura

$$\mathcal{S}^2 = 1, \quad \mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}.$$

Donc l'équation (47) pourra être présentée sous la forme

$$(48) \qquad \mathcal{S} S_l S = \mathcal{Q}.$$

Or, la substitution $\mathcal{Q}$ étant une dérivée des substitutions Q et R, par conséquent l'une des substitutions qui laissent x immobile, il est clair que, si l'on peut satisfaire à l'équation (48), ce sera uniquement en prenant pour $\mathcal{S}$ celle des substitutions (40) qui échangera x contre la variable transportée à la place de x par la substitution $S_l S$. Cela posé, comme aux valeurs

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4$$

du nombre l, répondront des valeurs de $S_l S$ représentées par les substitutions

$$(x, u, v)(y, w, z), \; (x, z, u, w, y), \; (x, v, u, y, w), \; (x, u, z)(y, v, w),$$

qui font respectivement succéder à x les variables

$$u, \quad z, \quad v, \quad u,$$

il est clair qu'à ces mêmes valeurs de l devront correspondre des valeurs de $\mathcal{S}$ représentées par les substitutions

$$S, \quad S_4, \quad S_1, \quad S,$$

qui ramènent x à la place des variables

$$u, \quad z, \quad v, \quad u.$$

Donc, la seule question à résoudre sera de savoir si chacun des quatre produits

$$SS_1S, \quad S_4S_2S, \quad S_1S_3S, \quad SS_4S$$

se réduit à une dérivée des substitutions Q et R. Or, une telle réduction a effectivement lieu pour chacun des deux produits S_4S_2S, S_1S_3S. Car on

trouve immédiatement

(49) $S_4 S_2 S = (y, z, u, v, w) = Q, \quad S_1 S_3 S = (y, w, v, u, z) = Q^{-1}.$

Quant aux deux produits

$$SS_1 S, \quad SS_4 S,$$

qui peuvent encore être présentés sous les formes

$$SS_1 S^{-1}, \quad SS_4 S^{-1},$$

et qui sont, en conséquence, équivalents aux deux substitutions

$$(u, v)(z, w), \quad (u, z)(y, v),$$

ils ne sont certainement pas de la forme Q^h; mais ils seront de la forme RQ^h, si le produit de chacun d'eux par R se réduit à une puissance de Q. Or, comme on trouve effectivement

$$RSS_1 S = (y, w, v, u, z) = Q^{-1}, \quad RSS_4 S = (y, z, u, v, w) = Q,$$

on en conclura

(50) $SS_1 S = RQ^{-1} = QR, \quad SS_4 S = RQ = Q^{-1} R.$

Donc, en définitive, chacun des produits

$$SS_1 S, \quad S_4 S_2 S, \quad S_1 S_3 S, \quad SS_4 S$$

se réduit à une dérivée des substitutions Q, R; et, par suite, on peut, avec six variables indépendantes

$$x, y, z, u, v, w,$$

composer des fonctions qui, étant doublement transitives, offrent douze valeurs distinctes. Ajoutons que, pour caractériser une telle fonction, il suffit de dire qu'elle n'est altérée par aucune des trois substitutions

$$Q = (y, z, u, v, w), \quad R = (y, w)(z, v), \quad S = (x, u)(y, w).$$

Il y a plus : comme on tire des formules (50)

$$R = SS_1 SQ = Q^{-1} SS_1 S = QSS_4 S = SS_4 SQ^{-1},$$

et de cette dernière, jointe à l'équation (35),

$$(51)\quad \left\{ \begin{aligned} R &= SQSQ^{-1}SQ = Q^{-1}SQSQ^{-1}S \\ &= QSQ^{-1}SQS = SQ^{-1}SQSQ^{-1}, \end{aligned} \right.$$

le système des dérivées des trois substitutions

$$Q,\ R,\ S$$

se confondra évidemment avec le système des dérivées des deux substitutions

$$Q \text{ et } S.$$

En conséquence, on pourra énoncer la proposition suivante :

» *Théorème.* Avec six variables indépendantes

$$x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w,$$

on peut toujours composer des fonctions, doublement transitives, qui offrent douze valeurs distinctes; et pour caractériser une telle fonction, il suffit de dire que sa valeur n'est pas altérée par les dérivées des deux substitutions

$$Q = (y,\ z,\ u,\ v,\ w), \quad S = (x,\ u)(y,\ w).$$

» En terminant ce paragraphe, nous observerons que la formule (51), combinée avec les équations (33), donne simplement

$$(52)\qquad T = QSQ^{-1}SQ = Q^{-1}SQSQ^{-1},$$

et que des deux formules

$$T = QSQ^{-1}SQ, \quad T = SQ^{-1}QSQ^{-1},$$

fournies par l'équation (52), la première entraîne la seconde, attendu que, T étant une substitution du second ordre, on a

$$T^2 = 1, \quad T = T^{-1}.$$

Observons aussi que des deux formules (49), la première, jointe à la formule (35), entraîne l'équation

$$SS_3S_1 = S_5S_3S_1 = QS_4S_2SQ^{-1} = Q,$$

et par suite l'équation

$$S_1 S_3 S = Q^{-1},$$

qui coïncide précisément avec la seconde des formules (49).

§ IV. — *Sur les fonctions qui sont tout à la fois transitives par rapport à six variables indépendantes, et par rapport à cinq ou à quatre de ces variables.*

» Conservons les mêmes notations que dans le § III; mais concevons que la fonction Ω, déjà supposée transitive par rapport à six et à cinq variables, soit encore transitive par rapport à quatre. Alors, d'après ce qui a été dit dans le § II, le nombre m des valeurs distinctes de Ω devra se réduire à l'un des entiers

$$1, \quad 2, \quad 6.$$

D'ailleurs, on pourra effectivement supposer

$$m = 1 \quad \text{ou} \quad m = 2,$$

puisque avec un nombre quelconque de variables, on peut toujours former des fonctions symétriques, et des fonctions dont chacune offre seulement deux valeurs distinctes. Il reste à voir si l'on pourra aussi supposer

$$m = 6,$$

et par suite

$$M = \frac{720}{6} = 120.$$

» Observons d'abord qu'en vertu des principes établis dans le § II, la fonction Ω sera toujours altérée par toute substitution qui déplacera seulement deux ou trois variables, si l'on a $m = 6$, et que, dans cette même hypothèse, certaines substitutions circulaires du quatrième ordre déplaceront quatre variables sans altérer Ω. Il en résulte qu'on aura

$$h_2 = 0, \quad h_3 = 0, \quad h_4 > 0,$$

et même

$$h_{2,2} > 0,$$

puisqu'une substitution de la forme P_4 aura toujours pour carré une autre substitution de la forme $P_{2,2}$. Par suite aussi, les formules (7), (8), (9), (10) du

§ III continueront de subsister, quand on y posera

$$m = 6,$$

en sorte qu'on aura

(1) $$h_4 = 15k_4, \quad 2h_{2,2} = 15k_{2,2}, \quad h_5 = 24k_5,$$

(2) $$h_6 = 20k_6, \quad 3h_{3,3} = 20k_{3,3}, \quad 2h_{2,2,2} = 5k_{2,2,2}, \quad h_{4,2} = 15k_{4,2},$$

(3) $$2k_4 + k_{2,2} = 6, \quad k_5 = 1,$$

(4) $$24k_6 + 8k_{3,3} + 3k_{2,2,2} + 18k_{4,2} = 60.$$

En vertu de la seconde des formules (1), $k_{2,2}$ devra être un nombre pair. De plus, h_4, et par suite k_4 devront encore être des nombres pairs, puisque toute substitution de la forme P_4 a pour inverse une autre substitution de la même forme. Enfin, les conditions

$$h_4 > 0, \quad h_{2,2} > 0$$

entraîneront les suivantes :

$$k_4 > 0, \quad k_{2,2} > 0.$$

Cela posé, il est clair qu'on ne pourra satisfaire à la première des formules (3) qu'en supposant

(5) $$k_4 = 2, \quad k_{2,2} = 2;$$

et, que de ces dernières formules, jointes aux équations (1), (2), (3), on tirera

(6) $$h_4 = 30, \quad h_{2,2} = 15, \quad h_5 = 24.$$

Comme d'ailleurs toute substitution de la forme P_4 a non-seulement pour cube une autre substitution de même forme, mais aussi pour carré une substitution de la forme $P_{2,2}$, les formules (6) prouvent évidemment que les substitutions qui, sans altérer Ω, déplaceront quatre ou cinq variables, se réduiront aux puissances de quinze substitutions circulaires du quatrième ordre, et de six substitutions circulaires du cinquième ordre. Du reste, cette conclusion et les formules (6) elles-mêmes pourraient encore se déduire des principes que nous avons établis dans le § II.

» Passons maintenant aux formules (2) et (4). Après avoir démontré,

comme dans le § III, que l'on a nécessairement

$$h_{3,3} > 0; \quad \text{et, par suite,} \quad k_{3,3} > 0,$$

on conclura de la seconde des formules (2) que $k_{3,3}$ est divisible par 3. D'ailleurs, m étant égal à 6, le nombre $k_{3,3}$ ne pourrait atteindre la limite 6 que dans le cas où Ω ne serait jamais altéré par aucune substitution de la forme $P_{3,3}$, ou, ce qui revient au même, par aucune substitution de la forme

$$P_3 P'_3,$$

P_3, P'_3 étant deux substitutions circulaires du troisième ordre, formées avec des variables distinctes; et cette dernière hypothèse est évidemment inadmissible. Car, si elle pouvait se réaliser, alors Ω, n'étant altéré par aucune des deux substitutions de même forme

$$P_3 P'_3, \quad P_3 P'^{-1}_3,$$

ne serait pas non plus altéré par leur produit

$$P_3^2;$$

c'est-à-dire par une substitution circulaire du troisième ordre; ce qui serait contraire à l'équation

$$h_3 = 0$$

précédemment obtenue. Donc $k_{3,3}$ devra être un multiple de 3, supérieur à zéro, mais inférieur à 6, et l'on aura nécessairement

$$k_{3,3} = 3, \quad h_{3,3} = 20. \tag{7}$$

Cela posé, la formule (4) donnera

$$24 k_6 + 3k_{2,2,2} + 18k_{4,2} = 36,$$

ou, ce qui revient au même,

$$8k_6 + k_{2,2,2} + 6k_{4,2} = 12. \tag{8}$$

D'autre part, le nombre $k_{4,2}$ devra nécessairement s'évanouir. Car, s'il ne se réduisait pas à zéro, alors, parmi les substitutions qui n'altéreraient pas Ω,

on trouverait une substitution de la forme $P_{4,2}$, ou, ce qui revient au même, de la forme

$$P_4 P_2,$$

P_4, P_2 étant deux substitutions circulaires et permutables entre elles, l'une du quatrième ordre, l'autre du second. Alors aussi Ω ne serait pas altéré par le carré

$$P_4^2$$

de la substitution P_4P_2. Donc, en vertu de ce qui a été dit plus haut, il ne serait pas non plus altéré par les substitutions circulaires du quatrième ordre

$$P_4 \quad \text{et} \quad P_4^{-1},$$

dont les carrés se réduisent à P_4^2, ni même par la substitution P_2, équivalente au produit de P_4P_2 par P_4^{-1}; ce qui serait contraire à la formule précédemment établie

$$h_2 = 0.$$

On aura donc encore

$$h_{4,2} = 0, \quad k_{4,2} = 0;$$

en sorte que la formule (8) pourra être réduite à

(9) $$8k_6 + k_{2,2,2} = 12.$$

Ce n'est pas tout : comme le nombre $k_{2,2,2}$ ne peut surpasser le nombre $m = 6$, on ne pourra, dans la formule (9), réduire k_6 à zéro. Donc, pour vérifier cette formule, il faudra nécessairement supposer

$$k_6 = 1, \quad k_{2,2,2} = 4,$$

et par suite, eu égard aux formules (2),

(10) $$h_6 = 20, \quad h_{2,2,2} = 10.$$

» Ainsi, en définitive, si la fonction Ω, étant transitive par rapport à six, à cinq et même à quatre variables, offre six valeurs distinctes, les substitutions

(11) $$1, \; P, \; Q, \; R, \ldots,$$

qui n'altéreront pas la valeur de Ω, seront toutes, hormis celle qui se réduit

à l'unité, de l'une des formes

$$P_6,\ P_{3,3},\ P_{2,2,2},\ P_5,\ P_4,\ P_{2,2},$$

et comme on aura

$$(12)\quad \begin{cases} h_6 = 20,\ h_{3,3} = 20,\ h_{2,2,2} = 10, \\ h_5 = 24, \\ h_4 = 30,\ h_{2,2} = 15, \end{cases}$$

les divers termes qui, avec l'unité, composeront la suite

$$1,\ P,\ Q,\ R,\ldots,$$

seront

20 substitutions de la forme P_6,

20 substitutions de la forme $P_{3,3}$,

10 substitutions de la forme $P_{2,2}$,

24 substitutions de la forme P_5,

30 substitutions de la forme P_4,

15 substitutions de la forme $P_{2,2}$.

D'ailleurs, toute substitution de la forme P_6 a non-seulement pour cinquième puissance une autre substitution de même forme, mais aussi pour carré et pour quatrième puissance, deux substitutions de la forme $P_{3,3}$, et pour cube, une seule substitution de la forme $P_{2,2,2}$. Or, de cette remarque, jointe à celles que nous avons déjà faites, il résulte évidemment que, dans l'hypothèse admise, les termes de la série (11) se réduiront aux diverses puissances de dix substitutions circulaires du sixième ordre, de six substitutions circulaires du cinquième ordre, et de quinze substitutions circulaires du quatrième ordre.

» Concevons à présent que, pour abréger, l'on nomme

$$P,\ Q,\ R$$

trois substitutions circulaires prises parmi celles qui n'altèrent pas la valeur de Ω, la substitution P étant du sixième ordre, Q du cinquième ordre, et R du quatrième seulement. Comme on pourra disposer arbitrairement de la forme des lettres propres à représenter les variables qui devront succéder l'une à

l'autre, en vertu de la substitution P, rien n'empêchera d'admettre que ces variables soient respectivement

$$x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w.$$

On pourra donc supposer

$$(13)\qquad P=(x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w).$$

D'ailleurs, m étant égal à 6, si l'on nomme

$$(14)\qquad 1,\ \mathfrak{P},\ \mathfrak{Q},\ \mathfrak{R},\ldots$$

les substitutions conjuguées qui n'altéreront pas Ω considéré comme fonction des seules variables

$$y,\ z,\ u,\ v,\ w,$$

le nombre des substitutions $1,\ \mathfrak{P},\ \mathfrak{Q},\ \mathfrak{R},\ldots$, représenté par le rapport

$$\frac{1.2.3.4.5}{m}=\frac{120}{6}=20,$$

sera précisément égal au nombre h_6 des substitutions

$$(15)\qquad P,\ P',\ P'',\ldots$$

qui, étant de la forme P_6, c'est-à-dire circulaires et du sixième ordre, n'altéreront pas la valeur de Ω considéré comme fonction de x, y, z, u, v, w. Donc, en vertu d'un théorème établi dans la séance du 15 décembre (page 1293), les substitutions

$$1,\ \mathfrak{P},\ \mathfrak{Q},\ \mathfrak{R},\ldots$$

seront celles que l'on déduit des expressions symboliques

$$\binom{P}{P},\quad \binom{P'}{P},\quad \binom{P''}{P},\ldots$$

lorsque, après avoir exprimé chacune des substitutions

$$P,\ P',\ P'',\ldots$$

à l'aide des diverses variables placées à la suite les unes des autres, en assi-

gnant toujours la première place à la variable x, on réduit

$$P, \ P', \ P'', \ldots$$

à de simples arrangements. Donc, puisque la série (15) renfermera nécessairement le terme P^{-1}, un des termes de la série (14), représenté par l'expression symbolique

$$\binom{P^{-1}}{P},$$

se réduira simplement à

$$\binom{xwvuzy}{xyzuvw} = (y, w)(z, v);$$

et par conséquent Ω, considéré comme fonction des quatre variables

$$y, \ z, \ v, \ w,$$

ne sera point altéré par la substitution régulière du second ordre

$$(y, w)(z, v).$$

Mais, comme on l'a vu, toute substitution régulière du second ordre qui n'altérera pas Ω, devra être le carré d'une substitution R circulaire et du quatrième ordre, comprise elle-même dans la série (11). On pourra donc supposer

$$(16) \qquad R^2 = (y, w)(z, v).$$

D'ailleurs, des deux substitutions

$$(y, z, w, v), \quad (y, v, w, z),$$

qui représentent les deux valeurs de R fournies par l'équation (16), l'une étant le cube de l'autre, l'une et l'autre devront faire partie de la suite (11). On pourra donc prendre pour R l'une quelconque d'entre elles, et supposer, par exemple,

$$(17) \qquad R = (y, z, w, v).$$

» Il sera maintenant facile, non-seulement de trouver une substitution Q du cinquième ordre qui soit une dérivée des substitutions Q et R, mais

encore de constater l'existence de la fonction transitive de six variables qui offre six valeurs distinctes. On y parviendra en effet, très-simplement, à l'aide des principes établis dans la séance du 8 décembre, ainsi que nous allons le faire voir.

» Les cinq puissances de P, distinctes de l'unité, savoir

$$P = (x, y, z, u, v, w), \quad P^2, \ P^3, \ P^4, \ P^5,$$

font succéder respectivement à la variable x les cinq variables

$$y, z, u, v, w,$$

auxquelles succéderaient, en vertu de la substitution $R = (y, z, w, v)$, les variables

$$z, w, u, y, v;$$

et, comme ces dernières succéderaient elles-mêmes à x, en vertu des substitutions

$$P^2, \ P^5, \ P^3, \ P, \ P^4,$$

il en résulte que, si l'on pose

$$(18) \qquad RP = P^2S, \quad RP^2 = P^5T, \quad RP^3 = P^3U, \quad RP^4 = PV, \quad RP^5 = P^4W,$$

chacune des substitutions

$$(19) \qquad S, T, U, V, W$$

laissera la variable x immobile. Effectivement, les valeurs de ces dernières substitutions, déterminées par les équations (18), ou, ce qui revient au même, par les suivantes

$$(20) \qquad S = P^4RP, \ T = PRP^2, \ U = P^3RP^3, \ V = P^5RP^4, \ W = P^2RP^5,$$

seront respectivement

$$(21) \ (y, u, w, v, z), \ (y, v)(u, w), \ (y, v, w, z), \ (y, u)(z, w), \ (y, z, v, w, u).$$

D'ailleurs, chacune des substitutions S, T, U, V, W, étant une dérivée de R et de P, n'altérera pas Ω. On pourra prendre pour Q l'une des substitu-

tions du cinquième ordre

$$S = (y,\ u,\ w,\ v,\ z), \quad W = (y,\ z,\ v,\ w,\ u)$$

qui sont inverses l'une de l'autre. Si, pour fixer les idées, on pose

$$Q = (y,\ u,\ w,\ v,\ z),$$

ou, ce qui revient au même,

(22) $$Q = (z,\ y,\ u,\ w,\ v) = P^4RP,$$

on aura

(23) $$S = Q, \quad W = Q^{-1}.$$

Ajoutons que la substitution

$$U = (y,\ v,\ w,\ z)$$

sera évidemment l'inverse de la substitution

$$R = (y,\ z,\ w,\ v),$$

de sorte qu'on aura encore

(24) $$U = R^{-1}.$$

Ainsi, les trois substitutions

$$S,\ U,\ W$$

seront trois dérivées des substitutions Q et R.

» D'autre part, s'il existe réellement une fonction Ω de x, y, z, u, v, w, qui soit doublement transitive et offre six valeurs distinctes, alors, en vertu des principes établis dans le § III, les vingt substitutions qui n'altéreront pas Ω considéré comme fonction des cinq variables

$$y,\ z,\ u,\ v,\ w,$$

devront se réduire aux dérivées des deux substitutions

$$Q = (z,\ y,\ u,\ w,\ v), \quad R = (y,\ z,\ w,\ v),$$

dont l'une est du cinquième ordre, et dont l'autre, étant du quatrième ordre,

vérifie les équations symboliques

$$R = \binom{Q^3}{Q}, \quad R^2 = \binom{Q^4}{Q}, \quad R^3 = \binom{Q^2}{Q}.$$

Donc alors, les substitutions T et V devront être, aussi bien que S, V, W, des dérivées de Q et de R.

» Réciproquement, si T et V se réduisent à des dérivées de Q et de R, alors le système des substitutions

$$S, T, U, V, R$$

et de leurs dérivées, étant réduit au système des dérivées de Q et R, sera du vingtième ordre; et, par suite, en vertu des principes établis dans la séance du 8 décembre (*voir* le 2e théorème de la page 1251), les dérivées diverses des deux substitutions P et R formeront un système dont l'ordre sera représenté par le produit

$$6.20 = 120.$$

Donc alors la fonction Ω de x, y, z, u, v, w, qui ne sera point altérée par les substitutions P, R, offrira cent vingt valeurs égales et six valeurs distinctes.

» Donc, en définitive, la seule question à résoudre est de savoir si les deux substitutions

$$T = (y, v)(u, w), \quad V = (y, u)(z, w)$$

se réduisent à des dérivées des substitutions Q et R.

» Or, comme des cinq variables

$$y, z, u, v, w,$$

w et y sont celles qui prennent la place de u, en vertu des substitutions T et V, il est clair que, pour obtenir à la place de T et V deux substitutions qui laissent immobile la variable u, il suffira de multiplier T et V par les deux puissances de Q qui font succéder u à w et à y, c'est-à-dire par Q^{-1} et Q. Donc les substitutions

$$Q^{-1}T, \quad QV$$

renfermeront seulement les quatre variables

$$y, z, v, w.$$

et chacune d'elles ne pourra être dérivée de Q et R, que dans le cas où elle deviendra une puissance de R. Donc la question est de savoir si

$$Q^{-1}T, \quad QV$$

se réduisent à des puissances de R. Or, cette réduction a effectivement lieu; car on trouve

$$Q^{-1}T = (y, w)(z, v) = R^2, \quad QV = (y, w)(z, v) = R^2,$$

et par suite

(25) $$T = QR^2, \quad V = Q^{-1}R^2.$$

Donc T, V seront, aussi bien que

$$S, \ U, \ W,$$

des dérivées de Q, R, ou même, eu égard à la formule (22), des dérivées de P, R; et l'on peut énoncer la proposition suivante :

» *Théorème.* Avec six variables indépendantes

$$x, \ y, \ z, \ u, \ v, \ w,$$

on peut toujours composer des fonctions, triplement transitives, qui offrent seulement six valeurs distinctes. D'ailleurs, pour caractériser une telle fonction, il suffit de dire que sa valeur n'est pas altérée par les dérivées des trois substitutions circulaires

$$P = (x, y, z, u, v, w), \quad Q = (z, y, u, v, w), \quad R = (y, z, w, v),$$

ou, ce qui revient au même, par les dérivées des deux substitutions P et Q ou P et R; attendu que les deux substitutions Q, R sont liées l'une à l'autre et à la substitution P par la formule

$$Q = P^4 RP,$$

de laquelle on tire

$$RP = P^2 Q \quad \text{et} \quad R = P^2 Q P^5.$$

» M. Hermite, dans les recherches que nous avons mentionnées, avait déjà rencontré des fonctions transitives de six variables, qui offraient six

valeurs distinctes. Désirant comparer le résultat qu'il avait obtenu avec celui que je trouvais moi-même, je lui ai demandé comment il s'y prenait pour construire de telles fonctions; sa réponse a été la règle que je vais transcrire.

» Pour obtenir une fonction de six variables indépendantes

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta$$

qui, sans être symétrique par rapport à cinq d'entre elles, offre dix valeurs distinctes, prenez une fonction symétrique s des trois quantités

$$\mathrm{f}(\alpha, \beta), \quad \mathrm{f}(\gamma, \zeta), \quad \mathrm{f}(\delta, \varepsilon),$$

la fonction $\mathrm{f}(x, y)$ étant elle-même symétrique par rapport à x et y; puis appliquez à la fonction s la substitution circulaire

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta)$$

et ses puissances. Vous obtiendrez cinq valeurs distinctes

$$s,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4$$

de s; et, si vous nommez

$$\Omega = \mathrm{F}(s, s_1, s_2, s_3, s_4)$$

une fonction symétrique des cinq valeurs distinctes de s, Ω sera effectivement une fonction qui, sans être symétrique par rapport à cinq des variables indépendantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, aura seulement six valeurs distinctes. »

RAPPORTS.

M. **Milne Edwards** donne lecture de la Note suivante :

« Une Commission, composée de MM. Duméril, de Blainville, Valenciennes et moi, a été chargée de l'examen d'un *Mémoire sur les Clavagelles* présenté par M. Deshayes le 24 novembre dernier; elle a pris immédiatement connaissance de ce travail, mais elle a cru devoir ne pas en rendre compte à l'Académie avant que d'avoir obtenu de l'auteur quelques éclaircissements relatifs à sa manière d'envisager la constitution de l'œuf chez ces Mollusques, et à la disposition du sac vitellin à goulot dont il a donné une description et des figures. M. Deshayes, ne possédant pas les pièces anatomi-

ques nécessaires, n'a pu satisfaire au désir de la Commission, et ce naturaliste a déclaré d'ailleurs que son travail étant actuellement imprimé et soumis à l'appréciation du public, il pense que la Commission n'aura plus à s'en occuper. Vos commissaires, partageant sur ce point l'opinion de M. Deshayes, ont l'honneur de déposer sur le bureau de l'Académie le Mémoire qu'elle avait renvoyé à leur examen. »

NOMINATIONS.

L'Académie procède, par la voie du scrutin, à la nomination d'un correspondant pour la place vacante dans la Section de Mécanique par suite du décès de M. *Hubert*.

Au premier tour du scrutin, le nombre des votants restant le même,

M. Eytelwein obtient	41	suffrages.
M. Moseley. . .	4	
M. Venturoli.	1	

M. Eytelwein, ayant réuni la majorité des suffrages, est déclaré correspondant de l'Académie pour la Section de Mécanique.

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

ASTRONOMIE. — *Mémoire sur une nouvelle méthode pour la détermination du mouvement de la Lune; par* M. Ch. Delaunay. (Extrait par l'auteur.)

(Renvoyé à l'examen de la Section d'Astronomie.)

« Dans le calcul des perturbations qu'éprouvent les corps de notre système planétaire, en vertu de leurs actions réciproques, on a suivi jusqu'à présent la marche qui se présente le plus naturellement, et qui consiste à déterminer, dans une première approximation, les inégalités qui ne dépendent que de la première puissance des masses perturbatrices; dans une seconde, celles qui dépendent des carrés et des produits de ces masses; dans une troisième, celles qui sont de troisième ordre, par rapport aux mêmes masses, et ainsi de suite. Cette méthode est très-convenable dans la théorie des planètes, parce que, leurs perturbations étant très-petites, la première approximation donne immédiatement presque tous les termes sensibles. Il n'en est pas de même dans la théorie de la Lune, dont le mouve-

ment, troublé par l'action du Soleil, s'éloigne beaucoup plus du mouvement elliptique que celui des planètes. La détermination du mouvement de la Lune, effectuée par la méthode que je viens de rappeler, nécessite donc plusieurs approximations successives qui supposent des calculs très-pénibles. Je me suis proposé, dans le Mémoire que je présente aujourd'hui à l'Académie, de faire connaître une nouvelle méthode d'approximation, applicable principalement à la recherche du mouvement de la Lune, et au moyen de laquelle on déterminera plus facilement les formules exactes de ce mouvement. Outre que, dans cette nouvelle méthode, les calculs se présentent d'une manière plus simple, on y trouvera cet avantage important de pouvoir facilement apprécier la grandeur des termes négligés.

» Admettons qu'on ait intégré les équations différentielles du mouvement de la Lune, en ne tenant compte que de l'action de la Terre, dont on suppose la masse concentrée en son centre : on aura trouvé ainsi que la Lune décrit une ellipse dont la Terre occupe un des foyers, et ses coordonnées seront exprimées en fonction du temps et de six constantes. Si l'on veut tenir compte ensuite des forces qui ont été négligées, et que nous supposerons provenir de la seule action du Soleil, on pourra conserver les mêmes formules pour représenter les coordonnées de la Lune, en y regardant les six constantes du mouvement elliptique comme des fonctions du temps. En adoptant des constantes convenablement choisies, les équations qui devront les déterminer en fonction du temps pourront prendre la forme suivante :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dL}{dt}&=\frac{dR}{dl}, & \frac{dl}{dt}&=-\frac{dR}{dL},\\ \frac{dG}{dt}&=\frac{dR}{dg}, & \frac{dg}{dt}&=-\frac{dR}{dG}.\\ \frac{dH}{dt}&=\frac{dR}{dh}, & \frac{dh}{dt}&=-\frac{dR}{dH},\end{aligned}\right.$$

R étant la fonction perturbatrice. C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on nomme

l l'anomalie moyenne de la Lune à l'origine du temps,

g l'angle compris entre la ligne des nœuds sur un plan fixe et le grand axe,

h l'angle compris entre la ligne des nœuds et une ligne fixe, tracée dans le plan fixe, et qu'on pose

$$L=\sqrt{a\mu},\quad G=L\sqrt{1-e^2},\quad H=G\cos i,$$

μ étant la somme des masses de la Lune et de la Terre, et a, e, i étant le demi-grand axe, l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite elliptique.

» La question est donc ramenée à l'intégration des équations (1). Supposons que nous y décomposions la fonction perturbatrice R en deux parties R_1 et R_2, en sorte qu'on ait

$$R = R_1 + R_2;$$

si l'on peut intégrer les équations (1), en y remplaçant R par R_1, et que dans cette intégration on prenne pour constantes arbitraires les valeurs initiales $L_0, G_0, H_0, l_0, g_0, h_0$ des variables L, G, H, l, g, h, on sait, d'après la théorie de la variation des constantes arbitraires, telle qu'elle a été donnée par M. Cauchy, que les mêmes intégrales seront les valeurs de L, G, H,..., satisfaisant aux équations (1), dans lesquelles R aura sa valeur complète, pourvu qu'on détermine L_0, G_0, H_0,..., par les équations

$$\frac{dL_0}{dt} = \frac{dR_2}{dl_0}, \quad \frac{dl_0}{dt} = -\frac{dR_2}{dL_0},$$
$$\frac{dG_0}{dt} = \frac{dR_2}{dg_0}, \quad \frac{dg_0}{dt} = -\frac{dR_2}{dG_0},$$
$$\frac{dH_0}{dt} = \frac{dR_2}{dh_0}, \quad \frac{dh_0}{dt} = -\frac{dR_2}{dH_0}.$$

» Il résulte de là que si l'on peut intégrer les équations (1), en mettant à la place de R une portion seulement R_1 de cette fonction, l'intégration de ces équations sera ramenée à celle d'équations de même forme, dans lesquelles R sera diminué de cette portion R_1 qu'on avait prise seule tout d'abord. De même, si les nouvelles équations peuvent être intégrées en y remplaçant la nouvelle valeur de R par une portion seulement de cette nouvelle valeur, l'intégration sera ramenée à celle d'équations encore de même forme, dans lesquelles R sera encore diminué de la portion qui vient d'être prise seule.

» On conçoit maintenant qu'en répétant un nombre suffisant de fois ces intégrations successives, on épuisera toutes les parties de R qui peuvent donner des résultats sensibles, et qu'on aura ainsi les valeurs de L, G, H, l, g, h, qui satisfont aux équations (1) avec autant d'exactitude qu'on voudra.

» Il est bon de remarquer que les intégrations successives que suppose cette méthode ne doivent pas nécessairement être effectuées sous forme finie, mais qu'il suffit que les intégrales soient développées en séries.

» Les constantes du mouvement elliptique qui conduisent à des équations

différentielles de la forme des équations (1) ne sont pas les seules qui permettent d'appliquer la méthode d'approximations successives que je viens d'indiquer : en adoptant tout autre système de constantes, on pourrait appliquer la même méthode, quoique les équations différentielles soient sous une forme moins simple, et l'on démontre facilement qu'à chaque nouvelle approximation, on a toujours à intégrer des équations de même forme que celles qu'on avait au commencement. Mais il me semble plus commode d'employer les constantes définies précédemment.

» Supposons qu'après avoir remplacé, dans la fonction perturbatrice R, les coordonnées de la Lune par leurs valeurs déduites des formules du mouvement elliptique, on ait développé R en série de cosinus des multiples des angles $nt+l, g, h$ et $n't+l'$; n étant le moyen mouvement de la Lune, et n', l' étant les quantités analogues à n, l, relatives au Soleil. On aura ainsi

$$\mathrm{R} = \mathrm{F} + \Sigma\,\mathrm{A}\cos\left[i(nt+l) + i'g + i''h + i'''(n't+l')\right],$$

la somme Σ s'étendant à tous les systèmes de valeurs de i, i', i'', i''', qui donnent à A une valeur suffisamment grande, pour qu'il en résulte des inégalités sensibles.

» Prenons d'abord dans cette valeur de R le premier terme F qui est indépendant de $nt+l$, g, h, et $n't+l'$, et nous aurons à intégrer, pour une première approximation, les équations

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = 0, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{L}}, \quad \frac{d\mathrm{G}}{dt} = 0, \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{G}}, \quad \frac{d\mathrm{H}}{dt} = 0, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{H}}.$$

» Ces équations montrent d'abord que, dans cette première approximation, L, G et H sont constants ; et, comme il en résulte que $\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{L}}, \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{G}}, \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{H}}$ sont des constantes que je nommerai $-l_1$, $-g_1$, $-h_1$, on aura

$$l = l_0 + l_1 t, \quad g = g_0 + g_1 t, \quad h = h_0 + h_1 t.$$

Nous devrons donc, après cette première approximation, remplacer dans R, diminué de F, les angles l, g, h par $l+l_1 t$, $g+g_1 t$, $h+h_1 t$; et les nouvelles valeurs de F, G, H, l, g, h seront déterminées par les équations (1), dans lesquelles R ne représentera plus que la somme des termes périodiques

$$\Sigma\,\mathrm{A}\cos\left[i(nt+l+l_1 t) + i'(g+g_1 t) + i''(h+h_1 t) + i'''(n't+l')\right].$$

On conçoit que chaque fois que, dans les approximations successives, on trouvera dans R un terme indépendant des angles, on s'en débarrassera tout aussi facilement qu'on vient de le faire pour le terme F.

» Pour faire une seconde approximation, on prendra, dans la nouvelle valeur de R, un seul terme périodique

$$A \cos[i(nt + l + l_1 t) + i'(g + g_1 t) + i''(h + h_1 t) + i'''(n't + l')];$$

et si l'on nomme R_1 ce terme, on aura à intégrer les équations

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dR_1}{dl}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{dR_1}{dL},$$

etc.

Dans les valeurs de $\frac{dl}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt}$, le temps t se trouvera en dehors du signe sinus, puisque n, l_1, g_1 et h_1 sont fonctions de L, G, H; mais j'ai reconnu qu'on pouvait facilement le faire disparaître. J'ai trouvé, en outre, que les six équations précédentes s'intègrent complétement; mais au lieu de prendre les intégrales sous forme finie, il vaudra mieux développer les valeurs de L, G, H, $nt + l + l_1 t$, $g + g_1 t$, $h + h_1 t$ en séries de sinus et de cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps, ce qu'on pourra faire par la méthode des coefficients indéterminés. Aucun des coefficients des termes périodiques contenus dans ces valeurs ne renfermera le temps. Dans le calcul dont je parle, il sera très-facile de tenir compte de toutes les puissances de la force perturbatrice qui donnent des termes sensibles, parce que les équations à intégrer sont simples, et qu'on n'aura pas besoin d'avoir, dans les valeurs des inconnues, un grand nombre de termes.

» Cette seconde approximation étant effectuée, on substituera les valeurs de L, G, H, $nt + l + l_1 t$, $g + g_1 t$, $h + h_1 t$, dans le reste de R; on prendra ensuite un terme de ce reste, sur lequel on opérera comme précédemment, et ainsi de suite.

» Outre l'uniformité que présenteront les calculs effectués dans les approximations successives, on voit que, si chaque fois on prend dans R le terme le plus considérable, les calculs se simplifieront à mesure qu'on avancera, puisque les termes de R dont on s'occupera allant en diminuant constamment, les valeurs de L, G, H, l, g, h devront renfermer de moins en moins de termes.

» J'ajouterai, en terminant, que j'ai déjà entrepris de refaire la théorie

de la Lune d'après la méthode expliquée dans ce Mémoire; mais les calculs sont loin d'être achevés. Aussitôt que je serai arrivé aux résultats définitifs, je m'empresserai de les communiquer à l'Académie. »

ANATOMIE COMPARÉE. — *Examen anatomique du Gastrochène de la Méditerranée* (Gastrochœna dubia); *par* M. **Deshayes**. (Extrait par l'auteur.)

(Commission précédemment nommée pour un Mémoire du même auteur sur la Clavagelle.)

« L'animal qui fait l'objet du Mémoire que j'ai l'honneur de soumettre aujourd'hui au jugement de l'Académie est un petit Mollusque perforateur, appartenant à la famille des Tubicolés de Lamarck, et qui, depuis Spengler, est connu sous le nom de Gastrochène ; M. Delle Chiaje, dans les dernières planches, encore sans texte, de ses Invertébrés de Naples, et M. Cailliaud, dans un petit Mémoire spécial que l'on trouve dans le *Magasin de Zoologie* de 1844, sont les seuls naturalistes qui aient donné la figure de l'animal de grandeur naturelle; mais ils n'y ont joint aucun des détails propres à faire saisir les rapports naturels de ce genre. Je dois à l'obligeance de M. Cailliaud d'avoir pu combler cette lacune; car, pendant mon séjour en Algérie, j'avais bien rencontré des coquilles mortes dans les calcaires sableux de l'île Rachegoun, mais je n'avais pu recueillir un seul individu vivant.

» Il résulte de mes observations, que le Mollusque du Gastrochène a beaucoup plus de ressemblance avec celui de l'Arrosoir qu'avec celui des Clavagelles. Sa masse abdominale, très-saillante dans le manteau, porte en avant un très-petit pied, fendu à la base et pourvu d'un byssus attaché à un crypte circulaire. Une des particularités les plus remarquables consiste en ce que les muscles rétracteurs du pied, au lieu de s'épanouir sur la surface extérieure de la masse abdominale pour faire une enveloppe solide à tous les organes qu'elle contient, passent au milieu d'elle, se rendent directement à la coquille, en laissant en dehors, et comme une sorte de hernie, l'ovaire presque tout entier.

» De tous les faits que j'ai découverts dans la structure du Gastrochène, celui qui m'a le plus étonné et qui, en effet, était le plus inattendu, consiste en deux organes spéciaux, compris dans la paroi intérieure du manteau et suivant en dedans le contour du bâillement extérieur des valves. L'un de ces organes, jaunâtre, étroit, part de la base des palpes externes et occupe le tiers environ de la longueur du manteau. L'autre organe est en connexion

avec celui-ci et il semble en être la continuation, mais tous deux sont séparés par une ligne nette et profonde. Ce second organe est beaucoup plus gros que le premier; il est irrégulièrement boursouflé par une matière muqueuse très-abondante; il descend d'avant en arrière jusqu'à l'entrée de la cavité des siphons, traverse le muscle rétracteur de ces organes, et son extrémité postérieure vient aboutir dans la partie la plus profonde de la cavité palléale, au-dessus du siphon anal, là où sont obligés de passer les œufs au moment de la ponte.

» Je ferai voir dans d'autres Mémoires qu'il existe, chez un très-grand nombre de Mollusques acéphalés, un organe spécial placé dans la profondeur des crochets, et que cet organe a des connexions constantes avec les branchies. Dans le temps de la ponte, il est turgescent, rempli d'une matière blanche et muqueuse. Cet organe manque complétement au Gastrochène, et je soupçonne qu'il a été déplacé dans l'animal dont il s'agit et transporté dans une partie du manteau, où il ne se montre pas habituellement. On le devine, cet organe a pour fonction de fournir aux œufs, pendant leur incubation, la matière muqueuse nécessaire à leur dernier terme de développement. Quoique j'aie trouvé des œufs mûrs plein les ovaires, il n'en existait pas un seul dans les branchies; ce qui me ferait soupçonner que l'incubation branchiale n'a pas lieu et qu'elle est remplacée par un séjour plus ou moins long des œufs, dans cette cavité profonde du manteau où aboutissent les organes de la mucosité.

» Quant aux organes antérieurs, je leur attribue une autre fonction, celle de sécréter la liqueur corrosive à l'aide de laquelle l'animal augmente sans cesse la cavité qu'il habite dans la pierre calcaire, de telle sorte que cette cavité est ainsi maintenue dans de justes proportions avec son propre développement. »

PHYSIOLOGIE. — *Observations sur l'existence d'une substance ternaire identique avec la cellulose dans toute une classe d'animaux sans vertèbres, les Tuniciers.* (Extrait d'une Lettre adressée à M. *Milne Edwards* par MM. C. **Loewig** et A. **Koelliker**.)

(Commissaires, MM. Dumas, Milne Edwards, Payen, Boussingault.)

L'existence d'une substance ternaire, voisine de la cellulose, ayant été signalée, l'année dernière, par M. Schmidt chez la *Phallusia mamillaris* et la *Frustulia salina*, Ehr., nous entreprîmes des recherches chimiques et microscopiques dans le but de décider d'une manière positive s'il y a en vérité,

dans le règne animal, une substance manquant d'azote analogue à la cellulose ($C_{12}H_{20}O_{10}$), et dans le cas où une pareille substance se trouverait, de savoir quelle est la structure élémentaire des parties formées par elle.

» 1°. Chez tous les animaux de la classe des Tuniciers qui ont été à notre disposition, savoir :

Phallusia mamillaris,
Phallusia intestinalis,
Phallusia monachus,
Cynthia papillata,
Clavellina lepadiformis,
Diazona violacea,
Botryllus polycyclus,
Pyrosoma giganteum,
Salpa maxima,

une très-grande partie du corps est composée d'*une substance parfaitement insoluble dans une solution de potasse concentrée*. Cette substance forme, chez les Ascidies simples et agrégées, la couche extérieure du cartilage (*Clavellina, Phallusia*) ou du cuir (*Cynthia*); chez les Ascidies composées, la masse gélatineuse, dans laquelle les groupes d'individus sont logés; et chez les *Salpa,* toute l'enveloppe extérieure plus ou moins résistante, dans laquelle sont contenus les muscles, les viscères, les nerfs, etc. Il résulte de ce fait que si l'un de ces animaux est traité avec la solution de potasse, il garde sa forme extérieure et ses contours nets, quand même tous les muscles, viscères, nerfs, etc., se dissolvent, de manière que des *Salpa, Pyrosoma, Botryllus, Phallusia* montrent, même après une digestion de plus de cinq jours avec l'alcali, toutes leurs rugosités, bosselures et angles, et conservent en apparence le même aspect qu'ils avaient primitivement. Seulement il est à remarquer que, chez les *Cynthia,* la substance en question, ayant été privée auparavant de ces nombreux dépôts calcaires, se montre plus flexible et d'une couleur blanche; tandis que, chez tous les autres Tuniciers mentionnés, elle acquiert, en raison de ce que certaines parties sont extraites de la solution alcaline, une transparence presque parfaite.

» 2°. Cette substance, insoluble dans l'alcali, *manque complétement d'azote,* comme nous nous en sommes convaincus en la chauffant après l'avoir séchée dans un tube avec un mélange de chaux et de soude (*Phallusia, Cynthia*), ou avec de l'hydrate de potasse (*Phallusia, Cynthia, Salpa, Clavellina, Diazona, Botryllus, Pyrosoma*). Nous remarquons, pour ceux qui voudraient vérifier ce fait, que pour réussir dans cette expérience il est nécessaire de découper les enveloppes en question en de très-petits morceaux

avant de les traiter avec la solution alcaline; sans cela, certaines parties azotées, qui sont mêlées à la substance manquant d'azote, ne seraient pas extraites et induiraient immanquablement l'observateur en erreur. Deux analyses élémentaires, entreprises, l'une avec $0^{gr},391$ de l'enveloppe extérieure de la *Phallusia mamillaris,* préparée, comme il a été dit, après que les parties calcaires en furent extraites par de l'acide muriatique, et séchée, et l'autre avec $0^{gr},130$ de celle de la *Cynthia papillata,* nous ont donné les chiffres suivants :

» (*a*) 100 parties de la substance ternaire contenue dans l'enveloppe de la *Phallusia* renfermaient :

C.	43,40
H.	5,68
O.	51,32

» (*b*) 100 parties de la substance ternaire de l'enveloppe de la *Cynthia papillata* contenaient :

C.	43,20
H.	6,16
O.	50,64

» Comme ces chiffres correspondent exactement à ceux trouvés pour la cellulose, qui, de même, est insoluble dans une solution alcaline, nous n'hésitons pas à soutenir *que, chez les Tuniciers, une grande partie du corps est composée d'une substance manquant d'azote, identique avec la cellulose des plantes.*

» 3°. Pour ce qui regarde les autres animaux inférieurs, nous n'avons trouvé chez aucun, un seul excepté, le moindre vestige d'une substance voisine de la cellulose; même les parties gélatineuses, cornées, cartilagineuses, coriaces et ligneuses, qui se trouvent chez les Polypes, les Médusaires et chez certains Mollusques, etc., ne nous ont rien montré de pareil, comme le prouvent la prompte dissolution (dans cinq à vingt-quatre heures) qu'elles subissent presque toutes dans une solution de potasse, et les vapeurs ammoniacales qui s'en exhalent sans exception quand on les brûle avec de l'hydrate de potasse. »

M. Gros soumet au jugement de l'Académie un Mémoire ayant pour titre : *Recherches sur la vésiculation du lait.* Les résultats de ces recherches sont résumés par l'auteur dans les propositions suivantes :

« 1°. Les globules du lait sont formés de la matière butyreuse renfermée dans des vésicules analogues à celles du vitellus;

» 2°. La tunique vésiculaire tant controversée, difficile à démontrer par les acides et les alcalis, se laisse teindre par l'iode après la réaction du chlore;

» 3°. La plupart des vésicules du lait chaud renferment une petite quantité d'acide carbonique;

» 4°. Les vésicules butyreuses se produisent sur la paroi interne des utricules mammaires qui, dans la période de lactation, se vésiculisent à la manière des ovaires, crèvent et versent leur contenu avec la granulation et les vésicules butyreuses dans les méats lactifères;

» 5°. Les corps granuleux du colostrum ne sont autre chose que de petits utricules avec leurs vésicules internes;

» 6°. A la fin de la lactation, la matière butyreuse est résorbée comme le vitellus dans l'ovaire; il ne reste que les tuniques utriculaires et vésiculaires, qui offrent divers phénomènes de résorption dans l'arrière-lait;

» 7°. Les vésicules du lait ne sont pas aptes à se convertir en vésicules du sang, qui ont aussi, d'ailleurs, leur reproduction vésiculaire. »

Ce Mémoire est renvoyé, ainsi qu'une Note du même auteur sur les *Spermatozoïdes*, à l'examen d'une Commission composée de MM. Dumas, Milne Edwards, Boussingault.

M. **Parchappe** adresse un supplément à son Mémoire sur *la structure du cœur*.

(Renvoi à la Commission précédemment nommée.)

M. **Letellier** soumet au jugement de l'Académie deux procédés différents pour la *conservation des bois*.

(Renvoi à la Commission précédemment nommée pour diverses communications relatives au même sujet.)

M. **de Eyrell**, qui avait précédemment adressé un Mémoire *sur les moyens d'étendre et de perfectionner la voix de chant*, Mémoire qui n'avait pu être admis avec les réserves que demandait l'auteur, envoie de nouveau ce travail, en déclarant qu'il se soumet aux conditions communes, qui ne lui étaient pas bien connues lorsqu'il fit sa première communication.

(Commissaires, MM. Magendie, Flourens, Babinet, Despretz.)

La Commission chargée de l'examen d'un travail de M. *Paltrinieri* demande l'adjonction de deux membres qui se soient particulièrement occupés

de mécanique analytique. MM. Cauchy et Liouville sont adjoints aux Commissaires précédemment nommés, MM. Arago, Poncelet et Pouillet.

La Commission, chargée de faire un Rapport sur les collections rapportées d'Abyssinie par M. Rochet d'Héricourt, demande l'adjonction d'un botaniste : M. de Jussieu est désigné à cet effet.

M. le Secrétaire perpétuel annonce qu'il est arrivé au secrétariat depuis la dernière séance, mais avant le premier janvier, et par conséquent en temps utile, cinq Mémoires destinés au concours pour le grand prix des Sciences physiques proposé par l'Académie (question concernant la description des *organes de la génération* dans les animaux vertébrés). Ces Mémoires sont renvoyés à l'examen de la Commission qui a été nommée à cet effet.

CORRESPONDANCE.

M. Flourens présente, au nom de M. *Straus-Durckheim,* un ouvrage ayant pour titre : « Anatomie descriptive et comparative du chat, type des Mammifères en général et des Carnivores en particulier », et donne, d'après la préface de l'auteur, une idée de ce grand travail qui comprend dans deux volumes de texte et un volume de planches, une exposition très-complète de l'ostéologie, de la syndesmologie et de la myologie du chat.

« Jusqu'à ce jour, dit M. Straus dans l'Introduction de son livre, il n'y avait que l'homme, parmi tous les Vertébrés, dont l'organisation fût bien connue, et cette seule branche de la science avait demandé plusieurs siècles d'étude à un grand nombre d'anatomistes pour arriver à l'état où elle est; tandis que sur les animaux domestiques, dont il serait cependant si important de connaître la structure, on n'avait que des traités fort incomplets, dans lesquels on chercherait en vain la description d'une foule d'organes qui ont été omis, par cela seul qu'ils sont difficiles à étudier ou un peu profondément placés, de sorte qu'une bonne description du cheval et du bœuf est encore un ouvrage à faire.

» Dans la monographie essentiellement anatomique que je publie aujourd'hui, je donne la description et les figures de toutes les parties qui constituent le squelette, les ligaments et le système musculaire du chat, véritable type des Mammifères digitigrades. Ce travail, qui comblera une partie des lacunes que j'ai signalées dans nos connaissances relatives aux Vertébrés, rentre d'ailleurs dans le plan général de mes travaux, plan auquel je me suis conformé dans mes Recherches sur les animaux articulés et notamment

dans mon ouvrage sur le *Melolontha vulgaris,* considéré comme type des Coléoptères. »

M. **Flourens** présente encore, au nom de l'auteur, M. **Reinaud**, de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, une nouvelle traduction d'un ouvrage arabe ayant pour titre : « Relation des voyages faits à la Chine et dans l'Inde, au IXe siècle de l'ère chrétienne, par les Arabes et les Persans. » M. Flourens appelle l'attention sur l'Introduction, les notes, et les fragments tirés de divers ouvrages, dont M. Reinaud a enrichi son travail. L'Introduction, qui forme à elle seule tout un volume, offre un tableau précieux de l'état des connaissances géographiques des Arabes sur l'Orient, à l'époque dont il s'agit.

GÉOLOGIE. — *Sur quelques faits dépendant du phénomène erratique de la Scandinavie.* (Extrait d'une Lettre de M. **P. Schimper** à M. *Élie de Beaumont.*)

« En lisant la Note de M. Durocher sur quelques faits dépendant du phénomène erratique de la Scandinavie, j'ai été surpris de n'y voir expliquer que les stries qui s'observent sur les bords de la mer et sur les petites îles avoisinantes. Quiconque a vu les *karren* sur les skaren de Gothenbourg, dans le fjord de Christiania et de Throndhjem, aux environs de Stockholm, etc., les aura reconnus sans difficulté pour des stries produites par l'action de l'eau, car elles sont irrégulières, convergentes, anastomosées, ondulées; en un mot, toutes différentes de celles des glaciers actuels et de celles qui s'observent dans l'intérieur de la Scandinavie, dans les hautes vallées, le long des montagnes, à une altitude où la mer n'a pas existé avant le dernier rehaussement de la presqu'île, sur la route, par exemple, de Christiania à Ringerige, à l'endroit surtout où cette route passe sur le beau porphyre rhombique de M. Léopold de Buch, sur toutes les pentes qui entourent le Tyrifjord, etc. Là il n'est plus question de stries inégales, ondulées, entrecroisées, anastomosées, s'effaçant à chaque instant; mais ce sont là des lignes droites, simples, fortement burinées, exactement parallèles entre elles, se continuant sur une longueur considérable, de 2 à 3 mètres, sans s'interrompre et sans changer de direction; on dirait la roche travaillée par un rabot monstre à proéminences inégales. Les bords des fissures qui traversent la pierre sont restés parfaitement tranchants; les rognons siliceux poreux sont coupés en deux comme les nœuds de branches d'une planche rabotée; les rognons compactes, au contraire, ayant réagi sur la masse

rabottante, font saillie et sont suivis d'une proéminence prolongée en ligne droite et ne s'aplanissant qu'insensiblement, ce qui prouve à l'évidence que le creux produit dans l'agent rabotant par le rognon s'est encore conservé pendant quelque temps après avoir eu dépassé ce dernier. Tous ces détails se voient sur un magnifique morceau de rhomben-porphyr que j'ai détaché sur la hauteur derrière Modum, et qui a fait l'admiration de M. Léopold de Buch, auquel je l'ai montré à Christiania.

» Il est évident que, si les stries étaient le produit de courants d'eau, les bords des fissures, dont quelques-unes au moins doivent avoir existé à l'époque où l'agent *sulcateur* a passé, seraient émoussés de même que les bords qui entourent les creux des rognons poreux, et que les rognons solides n'auraient pas pu ménager des reliefs à leur suite; aussi les stries ne seraient-elles pas droites et parallèles sur de grandes distances. La masse burinante et polissante s'est avancée d'un pas ferme, sans se laisser déranger par aucun obstacle, exerçant son action d'une manière uniforme et très-précise, et laissant des traces qui ne permettent aucun doute sur sa nature.

» Les montagnes du Tyrifjord ne sont pas les seules où j'ai observé, en Scandinavie, le phénomène erratique, et trouvé des preuves convaincantes contre l'hypothèse qui attribue les stries aux courants d'eau; j'ai retrouvé la même régularité dans le striement sur le schiste de transition, sur les bords du lac de Mjosen, sur le gneiss leptynitique de la vallée de Guldbrandsdalen, où j'ai vu en même temps les moraines les mieux caractérisées, au passage de Laurgaard, à la haute vallée de Tofté, qui présente également de nombreuses moraines provenant du Dovrefjeld (Sneehattan) et de Romsdalen; j'ai vu les roches striées de la même manière dans la vallée du Glommen et, entre autres, entre Flierdal et Eidsvald; je cite exprès cette dernière localité parce qu'on y voit de nombreux rochers de syénite striés à leurs faces surplombantes aussi nettement qu'en dessus.

» Quant aux dépôts de débris diluviens de la Dalécarlie, du Jemtland et du Helsingland, que M. Durocher cite en faveur de sa théorie, je crois qu'on n'a qu'à les examiner avec un peu plus d'attention que ne paraît l'avoir fait ce voyageur, pour se convaincre qu'ils sont en grand ce que sont les dépôts de nos glaciers d'aujourd'hui en petit. Tout le monde sait que l'eau qui découle des glaciers dépose des sables et des graviers, et que le glacier lui-même en transporte une grande quantité qu'il dépose en même temps que les blocs de moraines. Les sables purs dont parle M. Durocher ont été charriés par l'eau, et les détritus divers qui alternent avec ces sables ont été déposés par les glaciers, qui avançaient et reculaient périodiquement comme les glaciers d'au-

jourd'hui. Les blocs erratiques qu'on voit en très-grande quantité par toute la Wermlandie, la Dalécarlie et la Gestricie, sont souvent de dimensions très-considérables, et ne portent pas la moindre trace d'un charriage par l'eau, en ce que leurs angles sont parfaitement intacts. J'en ai vu qui doivent avoir fait plus de cent lieues pour arriver à l'endroit où ils se trouvent déposés maintenant. Ces rochers, de plusieurs milliers de pieds cubes, auraient, suivant la théorie de M. Durocher, franchi des montagnes assez élevées et des lacs profonds, par la simple force de l'eau, sans se heurter et sans perdre quelque chose de la fraîcheur de leur cassure!

» Comme le principal but de mon voyage était l'étude de la végétation cryptogamique du Nord, j'ai négligé de rédiger régulièrement les nombreuses observations que j'ai faites sur le phénomène erratique pendant mon séjour en Suède et en Norwége; mais j'espère retourner bientôt dans cette terre classique des anciens glaciers, et alors je ne négligerai pas de porter mon attention plus spécialement sur ce sujet....

» ... J'ai vu presque tous les grands glaciers de la Suisse, du Tyrol et de la Carinthie, et partout j'ai observé que les glaciers strient aussi bien de leur surface que de leur base. Le glacier de l'Etzthal, dans le Tyrol, descend comme un voile du haut d'un mur vertical pour aller déposer sa moraine au bas de ce mur. Le mur est strié.

» On a beaucoup parlé, dans ces derniers temps, du phénomène erratique dans les Vosges; je dois avouer qu'aucune des roches striées que j'y ai vues ne porte le caractère des roches striées par les glaciers. Les moraines qu'on veut avoir observées dans diverses grandes vallées n'ont qu'une analogie très-éloignée avec les moraines véritables; toutes les pierres sont roulées ou fortement écornées.

» *P. S.* Je m'occupe en ce moment d'une monographie des plantes fossiles du terrain jurassique de la Skanie; il existe une analogie frappante entre les végétaux de ce terrain, ceux du lias de la Franconie d'un côté et ceux du Kemper de Stuttgard, de l'autre côté; j'y ai même trouvé des cônes rappelant les cônes de Voltzia et un Equisétacé semblable à mon *Schizoneura paradoxa.* »

ZOOLOGIE. — *Observations de* M. GASPARD *sur la circulation du sang chez les Escargots.*

« Depuis quelque temps l'Académie a reçu plusieurs communications relatives aux particularités que présentent, chez divers Mollusques et chez certains Poissons, les organes de la circulation.

» Qu'il me soit permis de rappeler que j'ai déjà mentionné et signalé à l'attention des physiologistes ces particularités chez les Mollusques gastéropodes dans un *Mémoire sur le Colimaçon*, publié en 1822, et qui a obtenu une mention honorable de l'Académie au concours de 1824. Ce Mémoire, inséré dans le *Journal de Physiologie* de M. Magendie (tome II, pages 295-343), contient les lignes suivantes à la page 337 : « Le » sang des Escargots mérite de fixer un moment notre attention. Il est » contenu non-seulement dans les organes de la circulation, mais il est » encore épanché, principalement quand l'animal voyage, dans la ca- » vité où sont les viscères digestifs et génitaux qui nagent dans ce sang, de » manière qu'en incisant la paroi qui sépare la trachée et le ventre, on l'en » voit sortir par un jet abondant et continu. Lorsque l'animal est retiré et » caché dans sa coquille, le sang n'est point contenu et épanché de la même » manière. Ce phénomène m'a singulièrement frappé, et je ne connais rien » d'analogue dans les autres animaux, etc. »

« M. Milne Edwards répond que M. Gaspard n'a pas bien saisi le sens de la communication qu'il a faite au sujet du système veineux des Raies et des Squales, car il n'y a jamais été question de l'épanchement du sang dans la cavité abdominale des poissons. Quant à ce qui est relatif à l'*épanchement du sang dans l'abdomen des Escargots*, M. Milne Edwards aurait certainement cité l'observation de M. Gaspard, s'il se l'était rappelée; mais, mentionnée très-brièvement dans des Additions à un *Mémoire sur l'hivernation des Colimaçons*, elle avait entièrement échappé à son attention. Du reste, ce fait n'avait pas, lorsque M. Gaspard le publia, l'importance que les recherches plus récentes sont venues y donner; c'était un fait du même ordre que celui constaté depuis longtemps par Cuvier chez l'Aplysie, et ni M. Gaspard ni Cuvier n'en avaient tiré les conséquences qui en découlent aujourd'hui. On n'y voyait alors qu'une anomalie bizarre, et on n'en avait pas compris la portée relativement à la théorie générale de la circulation. Aujourd'hui on a fait voir que le passage du sang des vaisseaux dans les grandes cavités du corps des Mollusques, ou le retour de ce liquide en sens inverse, n'est pas un phénomène d'exhalation ou d'absorption comme on le croyait; que les lacunes interorganiques jouent le rôle de vaisseaux pour la circulation, et que la prétendue exception est, au contraire, la règle commune pour tout l'embranchement des Mollusques, aussi bien que pour le groupe des animaux articulés. »

ASTRONOMIE. — *Tableau des éléments elliptiques de la nouvelle planète découverte à Driessen, par* M. HENCKE, *le* 8 *décembre* 1845.

	LONGITUDE moyenne de l'époque.	LONGITUDE du périhélie.	LONGITUDE du nœud ascendant.	INCLINAISON	EXCENTRICITÉ.	DEMI-GRAND axe.	MOUVEMENT moyen diurne.	TEMPS de la révolution.
Orbite de M. Encke....	94°.48′.11″,8	135°.45′.17″,0	141°.10′. 6″,7	5°.20′. 7″,2	0,1955200	2,591576	850″,4730	ans. 4,1720
— de M. Mauvais..	97.30.16,5	133.23. 0,4	143. 0.39,0	5. 9. 9,6	0,2311135	2,607581	842,6552	4,2107
— de M. Faye.....	95.32.39,7	135.38.11,4	141.12. 5,5	5.19.35,4	0,2043547	2,606754	843,0564	4,2087
— de M. Goujon ..	98. 0.50,4	136.28.45,8	140.47.22,6	5 20.10,2	0,2315583	2,658104	818,7447	4,3337
— de M. Bouvard..	98 0.31,7	136.37.14,2	140.46. 2,5	5.20.17,4	0,2310907	2,656221	819,6245	4,3291

» Pour toutes ces orbites, l'époque est 0 janvier 1846. L'orbite de M. Encke est relative, quant au temps, au méridien de Berlin, et les quatre dernières au méridien de Paris.

» L'orbite de M. Encke a été calculée sur les observations des 14, 20 et 27 décembre; celles de MM. Faye, Goujon et Bouvard, sur les observations du 14 décembre faites à Berlin, du 24 décembre faites à Altona et du 1er janvier faites à Paris. M. Mauvais a combiné, pour la position du 24 décembre, l'observation de M. Petersen, d'Altona, avec celle de M. Rumker, de Hambourg.

» Il résulte, avec évidence, du tableau qui précède que le nouvel astre est une planète décrivant son orbite elliptique à une distance moyenne de 2 fois et 6 dixièmes celle de la Terre au Soleil, et accomplissant une révolution entière en 4 ans et un peu plus de 2 mois. L'excentricité de l'ellipse est de 2 dixièmes, et l'inclinaison à l'écliptique de 5 degrés environ. Ces circonstances établissent la plus grande analogie entre l'astre découvert par M. Hencke et les quatre petites planètes déjà connues, comprises entre Mars et Jupiter.

» M. Encke communique les observations suivantes, nouvellement réduites :

DATES.	TEMPS MOYEN de Berlin.	ASCENSIONS DROITES apparentes de la planète.	DÉCLINAISONS.
14 décembre 1845..	13h 56m 59s,7	64° 0′ 36″,0	+ 12° 39′ 49″,6
16 décembre......	10.20.16,5	63.36. 5 ,6	+ 12.39.57 ,1
20 décembre......	7.38.51,2	62.48. 6 ,4	+ 12.41.31 ,5
21 décembre......	7.49.38,4	62.36.27 ,0	+ 12.42.16 ,9
27 décembre......	11.29.14,6	61.33.46 ,4	+ 12.49.51 ,8

» Les observations suivantes ont été obtenues à l'équatorial de l'Observatoire de Paris, en comparant la planète à une étoile de 8e grandeur, dont la position a été déterminée aux instruments méridiens.

✱ Ascension droite apparente = 4h 0m 28s,04.
✱ Déclinaison apparente..... =+ 12° 59′ 7″,1.

DATES.	TEMPS MOYEN de Paris.	ASCENSIONS DROITES apparentes de la planète.	DÉCLINAISONS.
1er janvier 1846....	11h 6m 24s,9	60° 54′ 54″,0	+ 12° 59′ 56″,2
2 janvier........	10.20.58,1	60.48.48 ,9	+ 13. 2.16 ,5
3 janvier........	9.53.15,0	60.43. 5 ,4	+ 13. 4.43 ,6

M. V. Paquet adresse une Note relative à des *insectes* qui, à cette époque, se voient encore en grand nombre sur les branches de divers arbres fruitiers, et notamment sur celles du groseillier à fruit noir. Il attribue à la température très-douce des derniers mois l'apparition insolite de ces animaux.

M. Friedrich adresse, du Hanovre, un Mémoire écrit en allemand, et ayant pour titre : *Magnétisme universel.*

M. Babinet est invité à prendre connaissance de ce Mémoire, et à faire savoir à l'Académie s'il est de nature à devenir l'objet d'un Rapport.

L'Académie accepte le dépôt de quatre paquets cachetés présentés par M. **Bolumet**, par M. **Doyère**, par M. **Moreau de Saint-Ludgère** et par M. **Moreau-Boulard**.

COMITÉ SECRET.

La Section d'Astronomie propose de déclarer qu'il y a lieu d'élire à la place devenue vacante par suite du décès de M. *Cassini*.

L'Académie va au scrutin sur cette proposition, et la résout à l'unanimité par l'affirmative.

La séance est levée à cinq heures et demie. F.

ERRATA.

(Tome XXI, séance du 29 décembre 1845.)

Page 1409, ligne 9, *au lieu de* offrira vingt valeurs distinctes, et par conséquent $\frac{120}{20}$ ou 6 valeurs égales, *lisez* offrira vingt valeurs égales, et par conséquent $\frac{120}{20}$ ou 6 valeurs distinctes.

Page 1409, ligne 22, *au lieu de* 20 — 15, *lisez* 20 — 5.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

L'Académie a reçu, dans cette séance, les ouvrages dont voici les titres:

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie royale des Sciences; 2e semestre 1845; n° 26; in-4°.

Anatomie descriptive et comparative du Chat, type des Mammifères en général et des Carnivores en particulier; par M. H. STRAUS-DURCKHEIM; 2 vol. in-4°, avec atlas in-folio.

Relation des Voyages faits par les Arabes et les Persans dans l'Inde et à la Chine, dans le IXe *siècle de l'ère chrétienne; texte arabe imprimé en* 1811 *par les soins de feu* M. LANGLÈS, *publié avec des corrections et additions, et accompagné d'une traduction française et d'éclaircissements par* M. REINAUD, membre de l'Institut; 2 vol. in-16.

Les Steppes de la mer Caspienne, le Caucase, la Crimée et la Russie méridionale. Voyage pittoresque, historique et scientifique; par M. X. HOMMAIRE DE HELL; 19e à 22e livraisons in-8°, et planches in-folio.

Bulletin de la Société d'encouragement pour l'Industrie nationale; novembre 1845; in-4°.

Histoire chimique, médicale et topographique de l'eau minérale sulfureuse, et de l'établissement thermal d'Allevard (Isère); par M. A. DUPASQUIER; 1841; in-8°.

Mémoire sur la construction et l'emploi du Sulfhydromètre; par le même. (Ces deux ouvrages sont adressés pour le concours Montyon.)

Nouvelles observations sur les Insectes diptères de la tribu des Trachinaires; par M. MACQUART. (Extrait des *Annales de la Société entomologique de France*; 2e série, tome III; 2e trimestre 1845.) In-8°.

Notice sur les différences sexuelles des Diptères du genre Dochilopies, tirées des nervures des ailes; par le même. (Extrait du même ouvrage, 2e trimestre 1844.) In-8°.

Thérapeutique appliquée, ou Traitements spéciaux de la plupart des Maladies chroniques; par M. P.-T.-C. DEBREYME; in-12. (Cet ouvrage est adressé pour le concours Montyon.)

Nouvelles considérations morales, théoriques et pratiques, sur la coutume imprévoyante, antichrétienne et homicide des Inhumations précipitées. — Nouveau Mémoire; par M. LE GUERN; brochure in-8°. (Renvoyé à l'examen de la Commission nommée pour le prix fondé par M. Manni.)

Mémoire sur l'application des Machines à l'irrigation et au desséchement des terres; par M. SAINTE-PREUVE. (Extrait du *Bulletin de la Société d'encouragement.*)

Journal de Pharmacie et de Chimie; tome VIII; janvier 1846; in-8°.

Journal de Chimie médicale, de Pharmacie et de Toxicologie; janvier 1846; in-8°.

Revue zoologique; par M. GUÉRIN-MÉNEVILLE ; 1845 ; n° 11.

Annales de Thérapeutique médicale et chirurgicale, et de Toxicologie; par M. ROGNETTA; janvier 1846; in-8°.

Annales de la propagation de la Foi; janvier 1846 ; in-8°.

Journal des Connaissances utiles; décembre 1845; in-8°.

Encyclographie médicale; par M. LARTIGUE ; décembre 1845; in-8°.

Medico-chirurgical... *Transactions médico-chirurgicales, publiées par la Société royale de Médecine et de Chirurgie;* tome XXVIII. Londres, 1845; in-8°.

Gazette médicale de Paris; 3e série, tome Ier; n° 1, année 1846; in-4°.

Gazette des Hôpitaux; tome VII, n° 56, et tome VIII, n° 1; in-fol.

L'Écho du monde savant; 2e semestre 1845, n° 52, et 1er semestre 1846, n° 1; in-4°.

La Réaction agricole; n° 80.

Gazette médico-chirurgicale; année 1846; n° 1.